

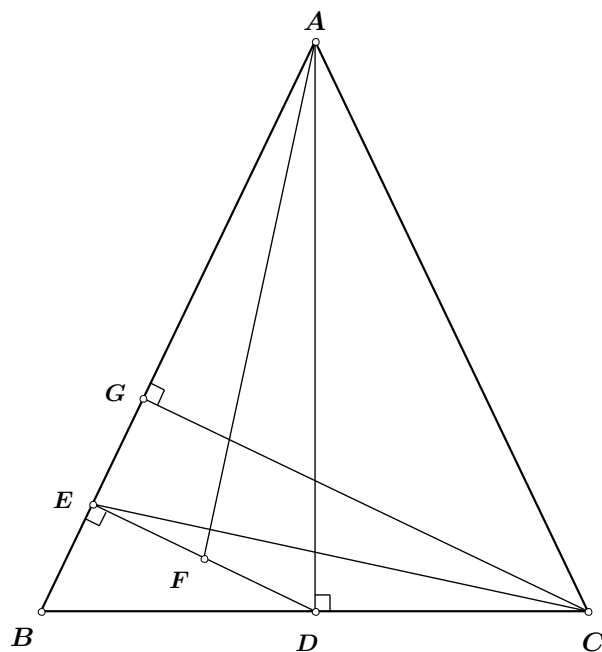
# Poopćenje jednog geometrijskog zadatka

Adrian Satja Kurdija

Na Državnom natjecanju mladih matematičara 2006. godine, 2. zadatak za treći razred (A kategorija) glasio je:

*U jednakokračnom trokutu  $ABC$  s krakovima  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ ,  $D$  je polovište osnovice  $\overline{BC}$ . Neka je točka  $E$  nožište okomice iz  $D$  na stranicu  $\overline{AB}$ , te  $F$  polovište dužine  $\overline{DE}$ . Dokaži da je  $AF$  okomito na  $EC$ .*

*Rješenje.* Iz točke  $C$  povucimo okomicu na stranicu  $\overline{AB}$ , i dobivenu točku označimo sa  $G$  (vidi sliku 1.).



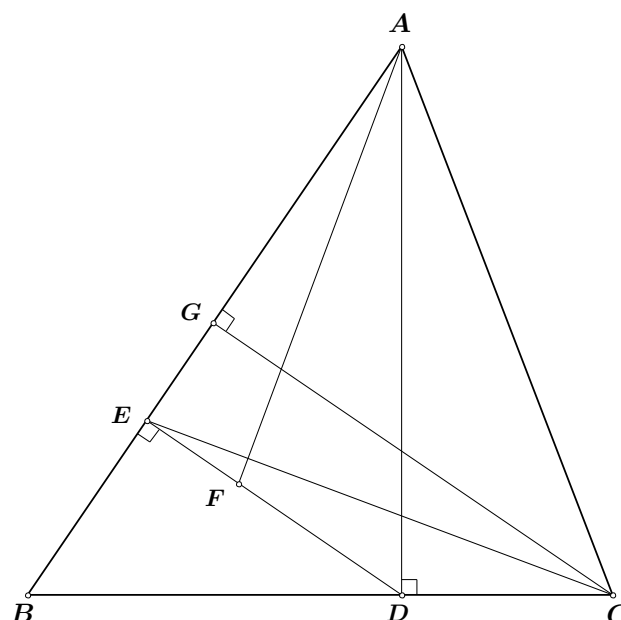
Slika 1.

Uočimo najprije da je dužina  $\overline{DE}$  srednjica trokuta  $BCG$ , pa je zato točka  $E$  polovište dužine  $\overline{BG}$ . Trokuti  $BCG$  i  $AED$  su slični ( $\angle CGB = \angle AED = 90^\circ$  i  $\angle BCG = 90^\circ - \angle GBC = 90^\circ - \angle ABD = \angle DAE$ ) i stranice su im međusobno okomite, odakle slijedi da su im i odgovarajuće težišnice međusobno okomite tj. da je  $AF \perp EC$ . ✓

Sada pokušajmo poopćiti taj zadatak, i to tako da naš trokut ne bude jednakokrakan. Poopćeni zadatak glasi ovako:

*U šiljastokutnom trokutu  $ABC$ ,  $D$  je nožište visine iz vrha  $A$  na stranicu  $\overline{BC}$ . Neka je točka  $E$  nožište okomice iz  $D$  na stranicu  $\overline{AB}$ , te  $F$  točka na stranici  $\overline{DE}$  takva da je  $|DF| : |FE| = |BD| : |DC|$ . Dokaži da je  $AF$  okomito na  $EC$ .*

*Rješenje.* Princip rješavanja sličan je kao i u početnom zadatku. Iz točke  $C$  povucimo okomicu na stranicu  $\overline{AB}$ , i dobivenu točku označimo sa  $G$  (vidi sliku 2.).



Slika 2.

Uočimo najprije da je omjer  $|BD| : |DC|$  jednak omjeru  $|BE| : |EG|$ . Slično kao i u početnom zadatku, trokuti  $BCG$  i  $AED$  su slični i stranice su im međusobno okomite. Dužine  $\overline{AF}$  i  $\overline{EC}$  više nisu težišnice tih trokuta, ali ipak imaju nešto zajedničko - njihove krajnje točke  $E$  i  $F$  dijele stranice  $BG$  i  $DE$  u jednakim omjerima ( $|BE| : |EG| = |DF| : |FE|$ ). Iz tog razloga su trokuti  $CEG$  i  $AEF$  slični, a kako su dva para njihovih stranica okomita ( $\overline{CG} \perp \overline{AE}$  i  $\overline{EG} \perp \overline{EF}$ ) slijedi da su okomite i stranice  $\overline{AF}$  i  $\overline{EC}$ , što je i trebalo dokazati. ✓

Za vježbu, pokušajte formulirati i riješiti zadatak u slučaju kada trokut  $ABC$  nije nužno šiljastokutan.